Das Optimierungskonzept - „Fensterln" mit dem TI-92

Josef Böhm, BHAK St. Pölten

In der traditionellen Schulmathematik werden üblicherweise Optimierungsaufgaben – die von Schülergenerationen gefürchteten Extremwertaufgaben – als „die“ Anwendung der Differentialrechnung eingeführt und erst in diesem Zusammenhang diskutiert, wenn man vom Linearen Programmieren absieht, das aber nicht immer behandelt wird. Graphische und numerische Zugänge bleiben weithin unbesprochen. Aber wohl nicht deswegen, weil sie so kompliziert sind sondern mehr deshalb, weil diese Behandlungsweisen zumeist mit zeitraubendem rechnerischen und zeichnerischen Arbeitsaufwand verbunden sind. Moderne Werkzeuge machen es nun möglich, das Optimierungskonzept schon sehr früh, jedenfalls weit vor der Diffenentialrechnung im Unterricht zu behandeln.

Mit dem TI-92 ist ein Computer im Westentaschenformat verfügbar, der all die besprochenen Behandlungsweisen in beliebiger Reihenfolge, ja oft sinnvollerweise sogar parallel, zuläßt. Lehrer und Schüler können mühelos zwischen dynamisch-geometrischer, numerischer, graphischer und analytischer Suche nach der Lösung „fensterln“. Auf diese Weise kann die grundlegende Idee auf mehrfache Art und Weise dargestellt werden, womit auch den unterschiedlichen Fähigkeiten der Schüler Rechnung getragen wird.

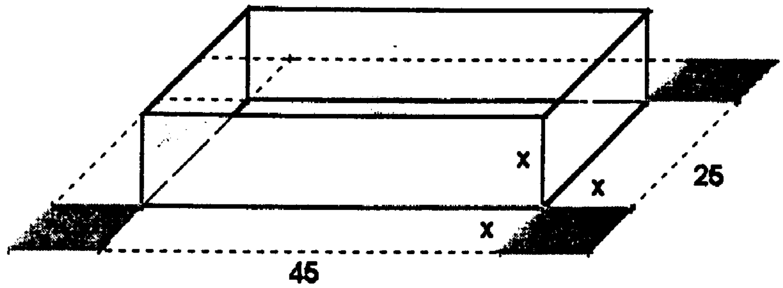
In diesem Vortrag werden drei „klassische“ Probleme aus den Extremwertaufgaben angeboten.

- **Die Zauberschachtel**
- **Das Rechteck im Trapez**
- **Die teure Stützstrebe**

Als Handelakademielehrer habe ich auch die „typische“ Anwendung der Differentialrechung im Rahmen der Kosten- und Preistheorie zur Ermittlung von Gewinnmaximum, Umsatzmaximum usw. aufbereitet. Ihre Darstellung würde den Rahmen des Vortrags sprengen. Ich verweise auf die angegebene Literatur.

Problem 1: Die Zauberschachtel

Einem 25cm × 45cm großen, rechteckigen Stück Karton werden an den 4 Ecken gleich große Quadrate ausgeschnitten und der verbleibende Rest wird zu einer Schachtel gebogen. Welche Seitenlänge müssen die Quadrate haben, dass die entstehende Schachtel das größte Volumen aufweist?

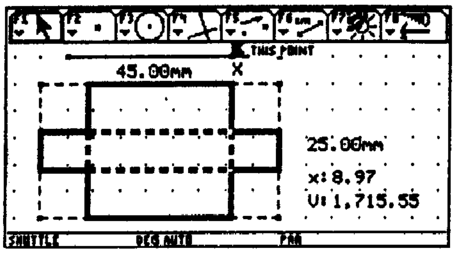


In der Unterstufe wird man vielleicht wirklich Modelle als Hausaufgaben herstellen lassen und einen Wettbewerb für die Schachtel mit dem größten Inhalt veranstalten.

Gibt es auch sehr „bizarre" Schachteln? Welche Schachtel(n) fassen den kleinsten Inhalt?

Am Ende wird man auch die Ergebnisse in einer Art Wertetabelle zusammenfassen und dann ist der Weg zu einem Funktionsgrafen nicht mehr allzuweit.

Mit dem TI-92 geht das alles ohne Papier und Bleistift – wobei ich diese elementaren Tätigkeiten als Einstieg nicht missen möchte. Wir laden im Geometrie-Werkzeug die vom Lehrer vorbereite Figur "Box". Damit sehen wir am Schirm das Netz unserer Zauberschachtel:

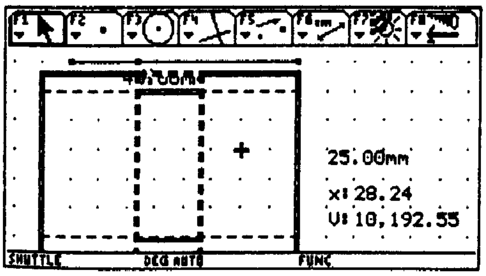


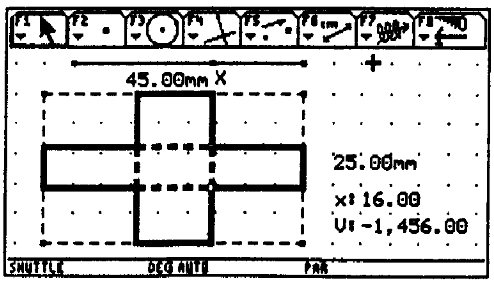
Aber nicht nur das Netz wird gezeigt, sondern auch die Länge der Quadratseite x und das dabei entstehende Volumen V. Der Punkt X auf der Strecke ist verschiebbar und damit wird die Länge x des Quadrats verändert. Jede Veränderung wirkt sich sofort auf das Volumen aus.

Es erweist sich als günstig, das Volumen einmal nachrechnen zu lassen – schon der Glaubwürdigkeit halber.

Wir könnten nun versuchen, die optimale Länge der Quadratseite durch Probieren zu finden. Die Auflösung des Schirms bringt es mit sich, dass keine kontinuierliche, sondern nur eine sprungweise Veränderung der Lage des Punktes X möglich ist. D.h., dass die „Lösung" nur eine mehr oder weniger ungefähre ist.

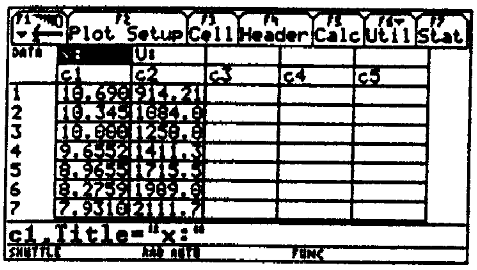
Der gleitende Punkt läßt sich „beleben" und es entstehen ganz merkwürdige virtuelle Schachteln, die sicher auch zur Diskussion anregen werden:





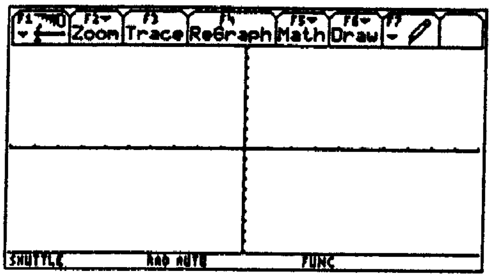
Wo ist das Quadrat geblieben?

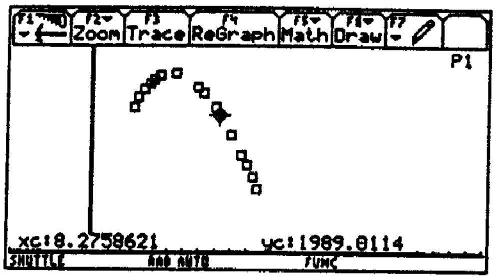
Mit einer Kombination von zwei Tasten lassen sich die Daten für x und V in einer Wertetabelle sammeln. Jeder Schüler sammelt 10 – 15 Daten – vorerst nur von sinnvollen Schachteln – und findet seine Daten in der Systemdatentabelle `sysdata`.



Hier läßt sich nochmals nach dem besten Wert forschen. Aber natürlich drängt eine Wertetabelle nach einer graphischen Darstellung. Und alle hoffen, aus dieser Visualisierung neue Hinweise auf eine wirklich „beste aller Schachteln" zu finden.

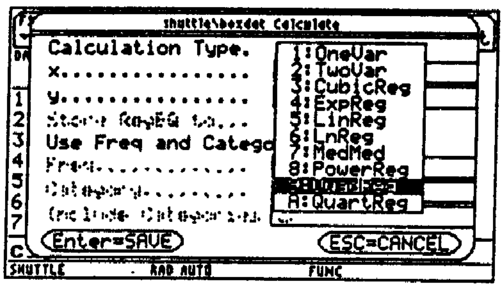
Auch das ist sehr rasch getan. (Die Schüler haben, wenn sie an das Gerät gewöhnt sind mit dieser Art des Wechsels verschiedener Repräsentationsformen überhaupt keine Probleme). In einem Streudiagramm sehen wir unsere gesamte Ausbeute – aber erst nachdem eine geeignete Skalierung gewählt wurde:

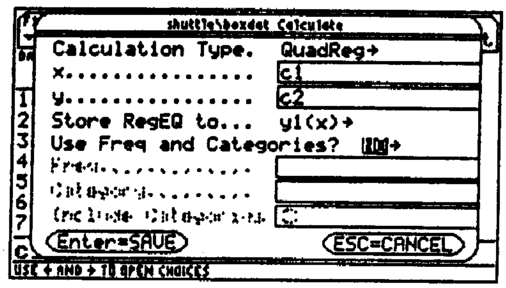




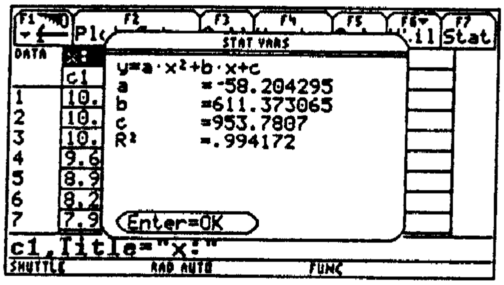
Mit dem Trace-Werkzeug können wir die Punkte besuchen, das bringt uns aber auch nicht weiter. Wenn wir nun schon soweit sind, dass die Schüler mit dem Funktionsbegriff etwas anzufangen wissen, dann erkennen sie sofort, dass hier eine Funktion dahinterstecken muß. Aber welche? Sofort erfolgt die Antwort: das ist eine Parabel!

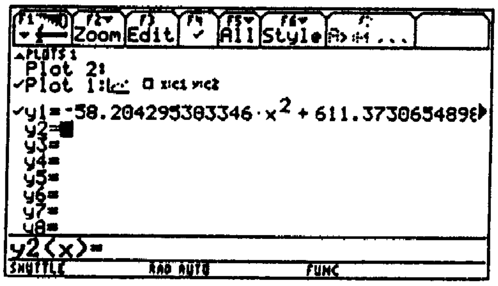
Aber woher nehmen wir die Parabel durch diese vielen Punkte. In dieser Situation verlasse ich mich mit dem besten Gewissen der Welt auf die Black Box `Calc`, die mir mit `QuadReg` etwas anbietet, von dem ich zwar noch nicht weiß, was es ist, das aber irgend etwas mit quadratischer Funktion (= Parabel) zu tun haben könnte.



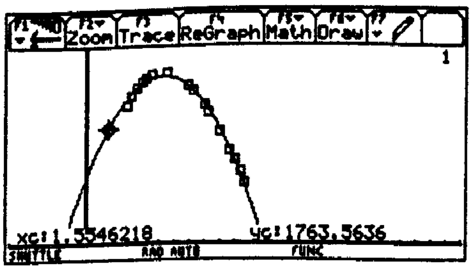


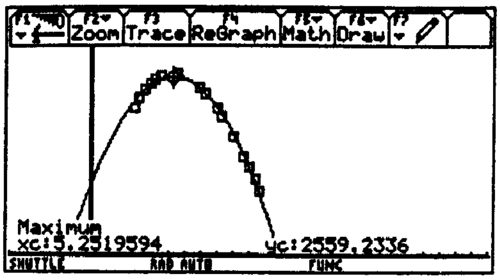
Und ich werde nicht enttäuscht:



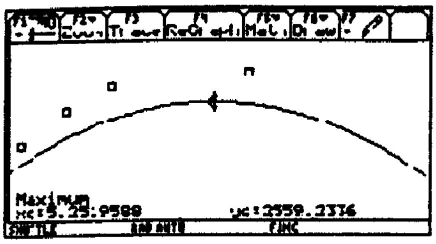


Jetzt bleibt nur noch, die Parabel zu zeichnen und ihren Scheitel zu bestimmen:



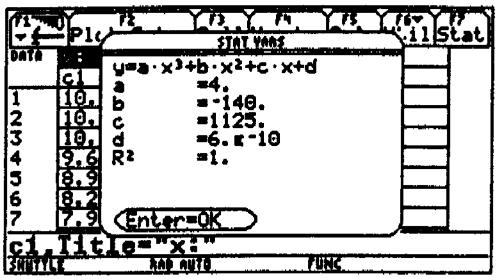


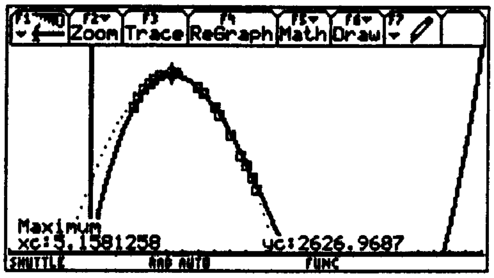
Der Scheitel läßt sich bei Kenntnis der Parabeleigenschaften natürlich auch aus der Funktionsgleichung ermitteln: $x_S = -b/(2a) = 5{,}2520$.



Damit sind nun alle zufrieden und das Problem ist gelöst. Oder doch nicht? Da war doch ein(e) SchülerIn – und nicht einmal der(die) Klassenbeste - , der zuerst ganz ohne TI-92 und Computer Algebra für x = 5 das Volumen V = 2625 erreicht hatte. Und diese(r) SchülerIn wehrt sich gegen diese Lösung und will es genauer wissen:

Vergrößerung zeigt, dass die Bedenken zu Recht bestehen. Also suchen wir ein besseres Verfahren: Wenn `QuadReg` nicht soooo schlecht war, dann ist `CubicReg` vielleicht doch besser:



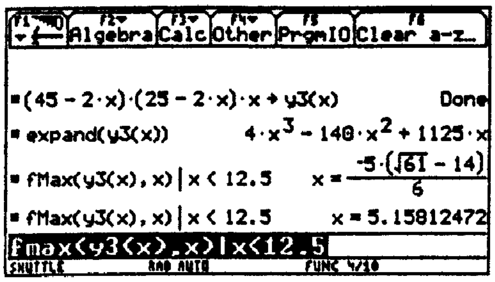


Hier fällt jedenfalls auf, dass die Koeffizienten so schöne ganze Zahlen sind – was heisst denn 6.E-10? – und auch ein Hinweis auf $R^2 = 1$ wird auch nicht fehlen dürfen. Die Kurve passt jetzt ausgezeichnet, die Vergrößerung wird das bestätigen und wir erhalten auch ein Optimum, mit dem alle zufrieden sein dürfen – wenn nicht dieser komische Schwanz am rechten Bildrand wäre.

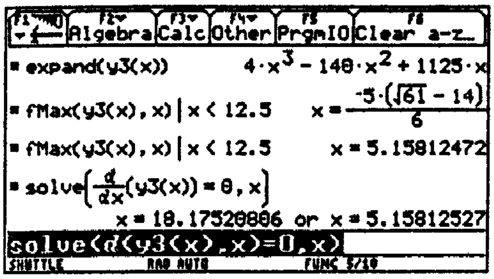
Wenn die Schüler schon die charakteristische Form einer kubischen Funktion kennen, dann sind sie nicht überrascht. Und natürlich kommt jetzt wieder die Sprache auf die merkwürdigen unwirklichen Schachteln die im Zuge der Animation aufgetreten sind. Der Kreis schließt sich schön langsam.

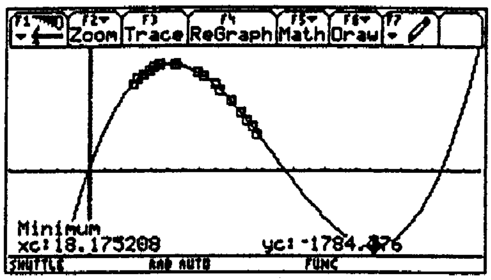
Ich zitiere gerne die Bemerkung einer Schülerin: „Das ist ja klar, dass es eine kubische Kurve sein muß, denn es handelt sich bei dem Problem ja um ein Volumen, und dann nimmt man immer hoch 3."

Jetzt kann noch die analytische Behandlung mit oder ohne TI92 angeschlossen werden: Wir suchen eine „Formel" für das Volumen, die nur von x abhängt: $V(x) = (45-2x)(25-2x)x$ und lassen das ausmultiplizieren:



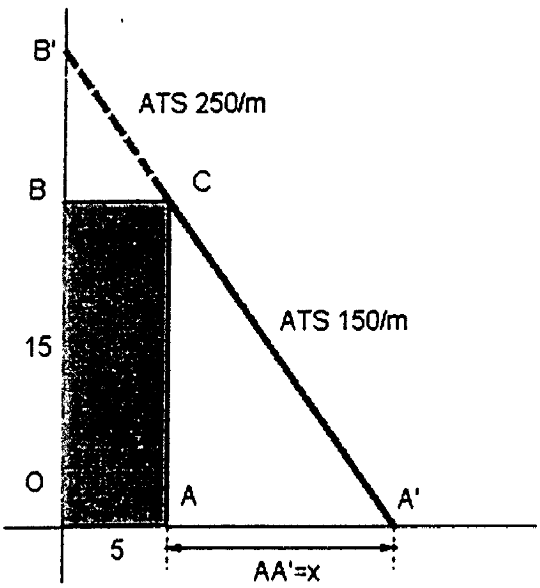
Man erkennt sofort die Identität mit der kubischen Funktion aus der Black Box. Wenn wir sie zeichnen lassen, passiert nichts. Ein Graf legt sich über den anderen. Wenn man aber mit der Differentialrechung fortsetzt, erhält man – für manche dann doch überraschend – eine zweite Lösung. Wenn man die Skalierung anpasst, sieht man die Kurve in ihrer ganzen Schönheit und das Problem hat all seine Geheimnisse geoffenbart.





Die nächsten beiden Probleme sollen nicht mehr so ausführlich beschrieben werden. Es wird aber auf, im Unterricht interessante Gesichtspunkte hingewiesen.

Problem 2: Die teure Stützstrebe

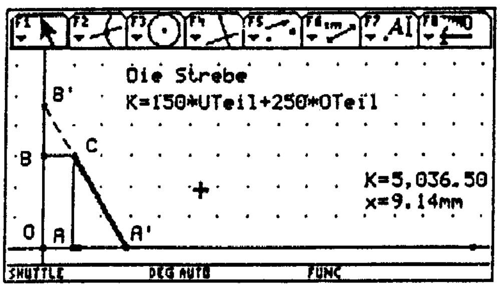


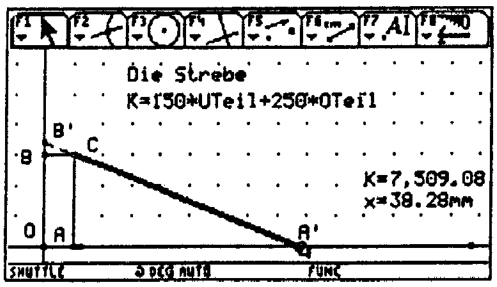
Eine Mauer mit dem Querschnitt OACB soll die Strebe A´B´ im Punkt C unterstützen. Unterer und oberer Teil der Strebe werden aus unterschiedlichem Material gefertigt und haben daher unterschiedliche Herstellkosten.

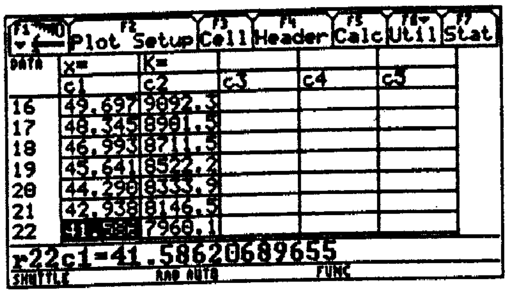
Der obere Teil kostet ATS 250.-/m und der untere Teil ATS 150.- / m.

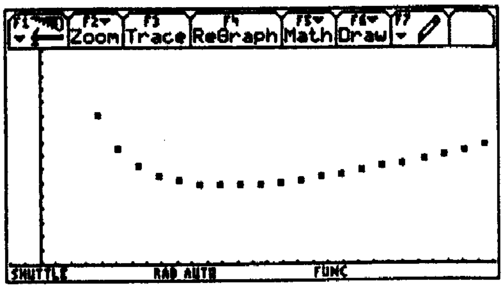
In welchem Abstand x (= AA´) vom Punkt A muß die Strebe fixiert werden, so dass die Gesamtkosten möglichst niedrig werden?

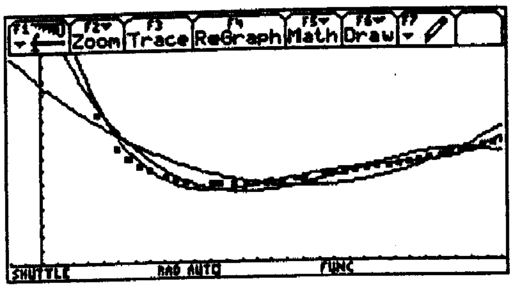
Nach ein paar grundsätzlichen Überlegungen gehen wir gleich zum dynamischen Modell über und sammeln Daten, in der Hoffnung, dass die Lösung ähnlich wie in Problem 1 zu finden sein wird:





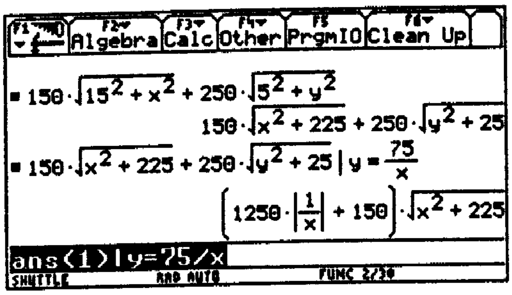


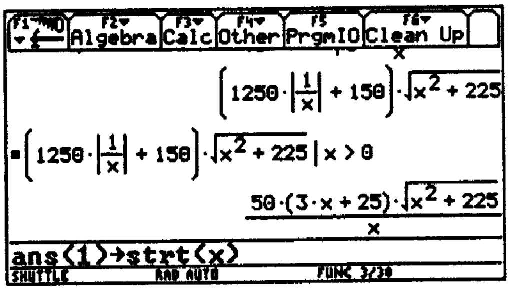


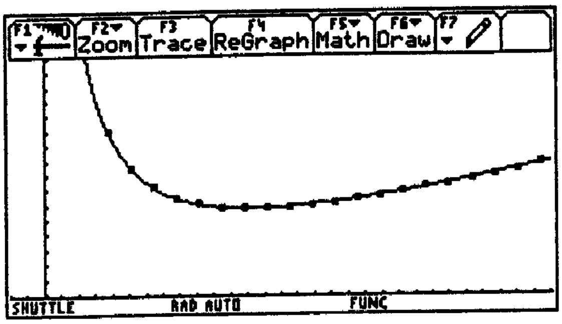


Rasch erhält man wieder ein Streudiagramm und versucht sofort wieder eine passende Regressionslinie zu finden. Dass eine Parabel sicher nicht ausreicht, ist leicht zu erkennen, daher gehen die Schüler gleich wieder auf die kubische Regression los:

Aber keine der angebotenen Regressionslinien ist wirklich ideal! Das Allerweltsrezept versagt! Daher müssen wir ein geeignetes mathematisches Modell erstellen.
Der Pythagoräische Lehrsatz gemeinsam mit der Proportion y : 5 = 15 : x (BB′ = y und AA′= x) führt sofort zu einer Formel für die Gesamtkosten. Diskussion kommt auf wegen des Absolutbetrags!! CAS sind pingeliger als der „Normallehrer"!

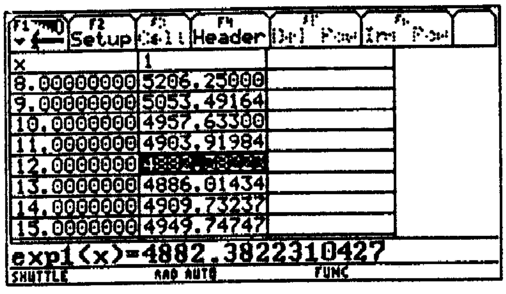


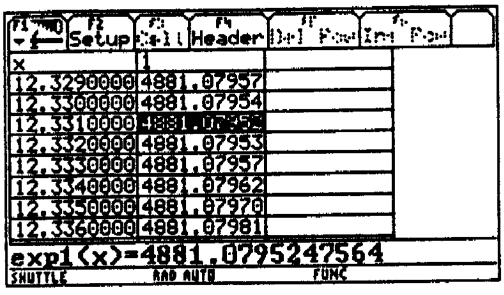




Wenn man nun den Grafen dieser Funktion zeichnen läßt, passt dieser erwartungsgemäß ins Streudiagramm. Jetzt sollte auch klar sein, warum die Regression nicht funktionieren kann: hier tritt eine irrationale Funktion auf.

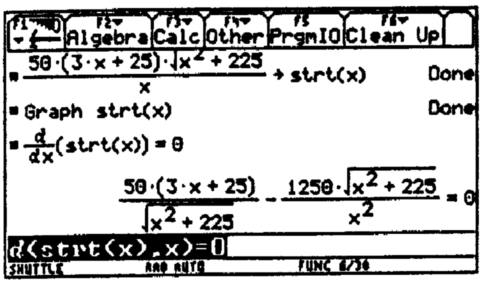
Vorerst können wir auch ohne Differentialrechung versuchen, das Problem näherungsweise numerisch zu lösen. Wir erstellen eine Wertetabelle und approximieren die Lösung durch eine dezimale Suche, wobei wir eine Genauigkeit von zwei Dezimalstellen erreichen wollen.

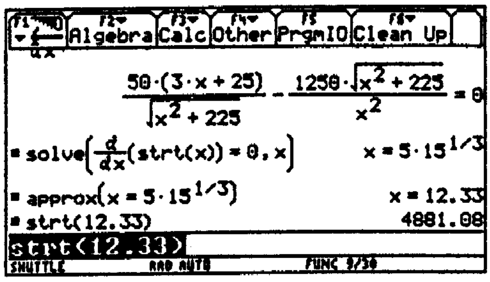




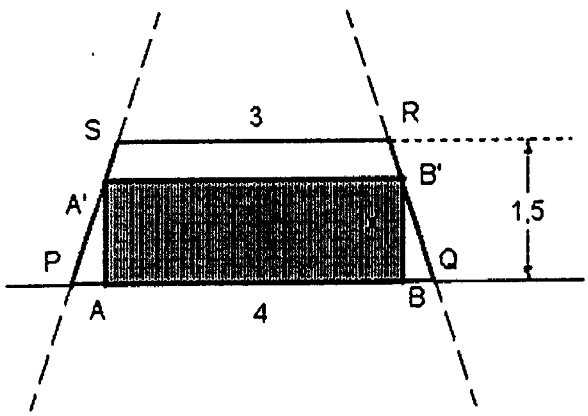
Natürlich reizt jetzt noch die analytische Lösung. Mit einem CAS ist das Problem praktisch mit dem Aufstellen von Haupt- und Nebenbedingung(en) gelöst – oder auch nicht, wie das nächste Problem zeigen wird.

Als günstig erweist sich hier der Einsatz eines sogenannten „Scripts" – ein von den Schülern individuell vorbereitetes „Rezept" zur Behandlung von Extremwertaufgaben. Derartige Scripts sind eine wertvolle Unterstützung bei wohlvorbereiteten Demonstrationen. Sie können auch leicht auf die Schülergeräte übertragen werden. In diesen Scripts werden die Schüler zu eigenen Untersuchungen aufgefordert, die sie dann in ihrem Tempo und mit ihren Kenntnissen ausführen. Auf eine ordentliche Dokumentation neben dem TI ist größter Wert zu legen.





Problem 3: Das Rechteck im Trapez



Die Figur zeigt ein Rechteck, das einem gleichschenkligen Trapez (a = 4, c = 3, h = 1.5)eingeschrieben ist.

a) Welchen größten Flächeninhalt kann das Rechteck haben?
b) Welches ist der größtmögliche Umfang?

Ich lasse hier auch die Schüler zuerst eine Handskizze anfertigen. Sie sollen die Abhängigkeit von Flächeninhalt und Umfang von einer in der Figur vorkommenden Größe erkennen.

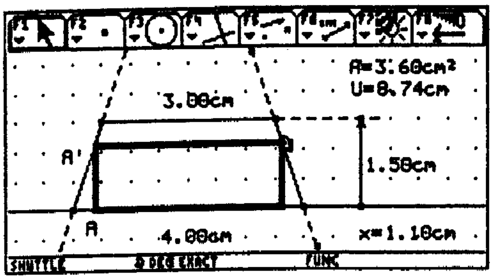
Gerade bei dieser Aufgabe beginne ich gerne mit der analytischen Lösung – Kenntnis der Differentialrechnung ist nicht nötig!

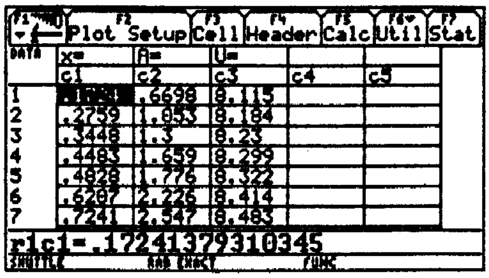
Hauptbedingung: Fläche = $x * l$ mit x = BB' und l = A'B' = Maximum

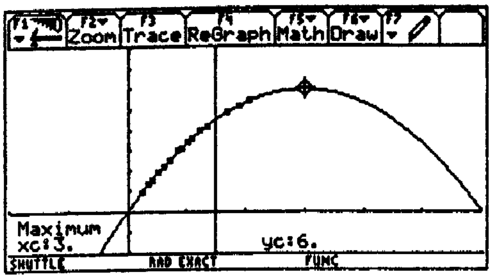
Nebenbedingung: $BB':BQ = \frac{3}{2} : \frac{PQ-RS}{2} \Rightarrow x:\frac{4-l}{2} = \frac{3}{2}:\frac{1}{2}$

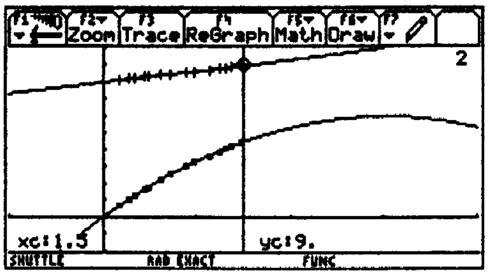
Auch ohne Computer Algebra ergibt sich leicht die Formel für die Fläche: $Fl(x) = -2x^2/3 + 4x$. Elementare Kenntnisse über den Grafen der quadratischen Funktion führen sofort zum Scheitel mit $x = 3$. Der zugehörige Flächeninhalt ist 6. Damit sind die Schüler zumeist zufrieden – bis man sie auffordert, dieses Rechteck in die Skizze einzuzeichnen. Dieses Rechteck gibt es nicht!!

Nun gehen wir zum dynamischen Modell über und verfahren wie bereits gewohnt:

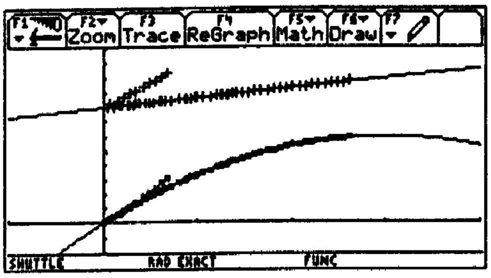






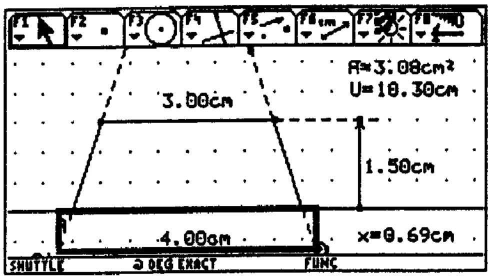


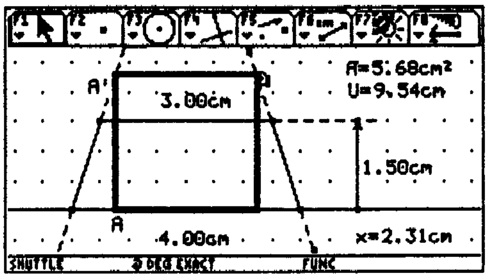
In den beiden Screenshots habe ich die „natürliche" Grenze für x = 1,5 auch eingezeichnet. Damit wird das vielfach vernachlässigte Auftreten eines Randextremums sicherlich sehr deutlich und drastisch präsentiert.



Besonders interessant wird es, wenn man diese Scatterplots zeigt und nach der Herkunft der abweichenden Punkte fragt, bzw die Ortslinie für diese Punkte angeben läßt.

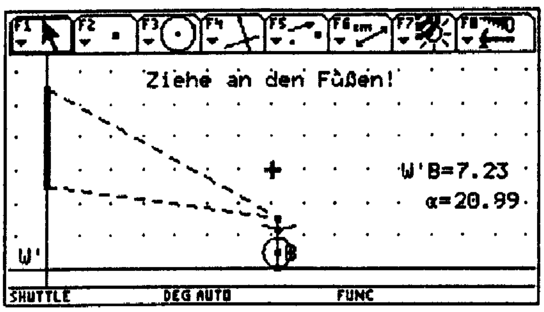
Die nächsten Bilder sollten eine Hilfestellung darstellen:

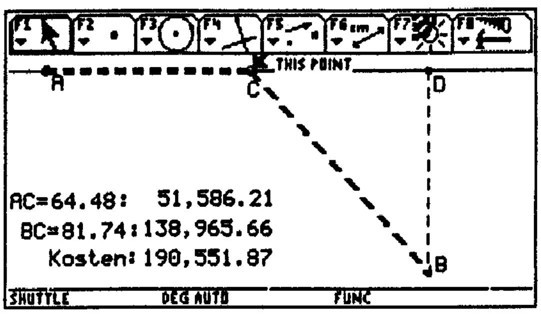


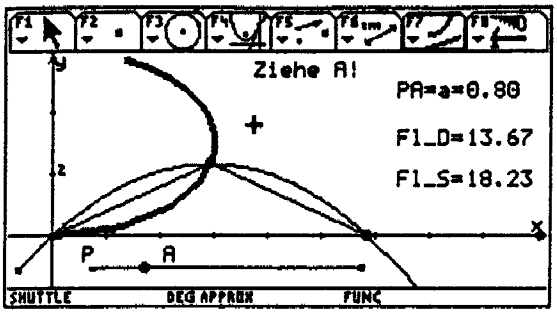


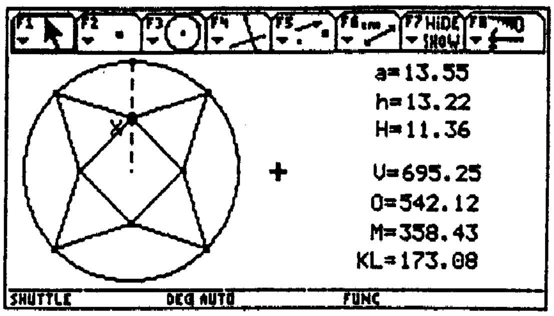
Die Herstellung der dynamischen Objekte ist nicht ganz einfach, aber überaus reizvoll. Ich habe aus gängigen Schulbüchern insgesamt 15 Probleme „belebt". Sie können von einer Diskette über den PC auf den Lehrer-TI und von dort auf die Schülergeräte übertragen werden. [1]

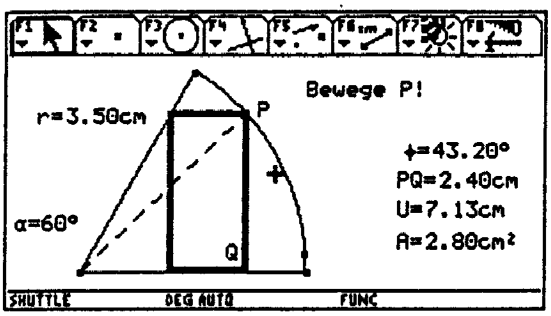
Hier finden Sie einige Beispiele.

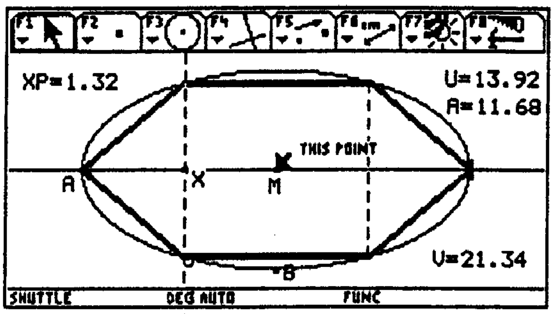


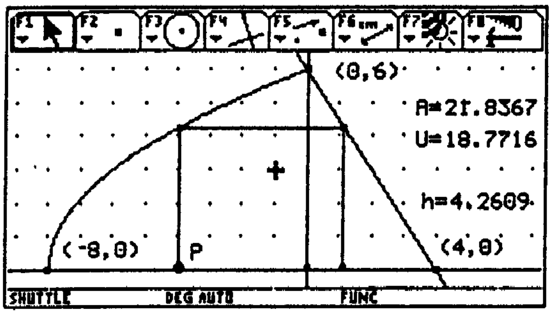


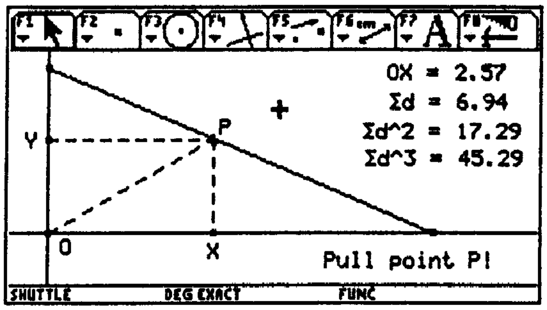












[1] J.Böhm, Optimierungsaufgaben grafisch, numerisch und analytisch mit dem TI-92 lösen, bk-teachware 1998